

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang
1970/1971
no 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *ƒ* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *ƒ* 15,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Grootheden

Drs. J. v. DORMOLEN
Oegstgeest

0.1 In discussies over het toepassen van wiskunde in de natuurkunde komt strijk en zet het onderwerp grootheden ter sprake. Het blijkt dan dat men het onderwerp vanuit verschillende standpunten kan benaderen. Ik zal proberen die standpunten aan de hand van een voorbeeld duidelijk te maken.

0.2 Bij de formule voor de oppervlakte van een rechthoek

$$l \cdot b = O$$

zullen aanhangers van het ene standpunt, dat ik gemakshalve maar even het fysische standpunt noem, betogen dat de variabelen grootheden voorstellen. (Of zo u wilt: de letters zijn variabelen over een gegeven verzameling grootheden). Dat heeft tot gevolg dat voor hen uitspraken als

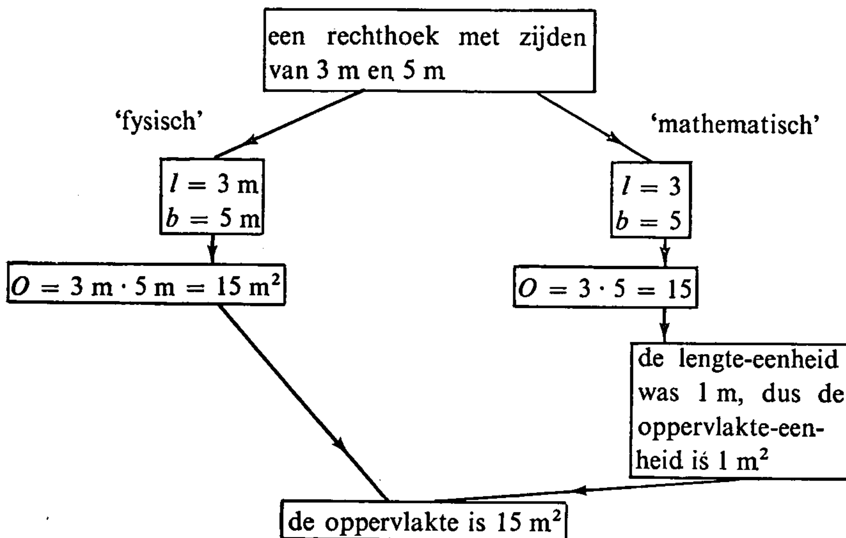
$$3 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}^2$$

zinvol zijn.
Directe tegenstanders blijven volhouden dat je geen meters met elkaar kunt vermenigvuldigen en dat je de letters O, l en b moet opvatten als variabelen over de verzameling reële getallen.
Dit noem ik gemakshalve het mathematische standpunt, al zal verderop blijken dat het geen goede benaming is.

Schematisch kan men de beide denkwijzen weergeven zoals op de volgende bladzijde gebeurd is.

Er is ook nog een soort van tussenstandpunt waarbij gesteld wordt dat het schrijven van m en m^2 alleen maar gebeurt omdat daardoor voorkomen wordt dat de rekenaar vergeet over welke eenheden het gaat. Zoals gebruikelijk wordt ook hier deze compromissenzoeker door beide partijen diep veracht om zijn onprincipiële standpunt.

0.3 Waar het in wezen om gaat is dacht ik deze vraag: Is het bij het maken van een wiskundig model van een fysische situatie nodig te werken met het lichaam van de reële (of rationale, of eventueel complexe) getallen, of is ook een model te bedenken dat niet uit getallen maar uit grootheden bestaat?



Het schema bij 0.2

0.4 Bij het zoeken in literatuur naar een antwoord op deze vraag stuitte ik op een artikel van H. Griesel, *Algebra und Analysis der Grössensysteme* (Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Band XVI, 1969). De schrijver toont in dat artikel aan dat er wel degelijk zoiets als een mathematisch model van grootheden bestaat. Daaruit blijkt, dat wat ik hierboven het fysische standpunt noemde, in feite juist een strikt mathematisch standpunt is. En dat de hierboven. genoemde 'mathematische' denkwijze in wezen onhandig en omslachtig is. Ik zal proberen een paar van de belangrijkste resultaten van Griesel's artikel weer te geven. Het is te lang om het in extenso over te nemen. Belangstellenden beveel ik het origineel van harte aan. Het is helder geschreven en u hoeft echt geen groot mathemaat te zijn om het te begrijpen. U moet alleen wat vertrouwd zijn met enkele grondbegrippen als equivalentie, equivalentieklassen, groepen.
Het tijdschrift is in elke Universiteit te leen te krijgen.

1.1 Definitie Een verzameling G van objecten, *grootheden* genaamd, heet een *groothedenstelsel,* als geldt:

1 In G is een equivalentierelatie, genaamd *gelijkwaardigheid,* vastgelegd. (notatie: $x \sim y$).

2 In elke equivalentieklasse (ook wel groothedenklasse genaamd) is een operatie + (*optelling* genaamd) vastgelegd, benevens een vermenigvuldiging met reële getallen, zodanig dat deze groothedenklasse een eendimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$, het lichaam van de reële getallen is.

3 In G is een operatie $\cdot$ vastgelegd (*vermenigvuldiging* genaamd) zodanig dat

a $\rho(a \cdot b) = a \cdot (\rho b)$ voor elke $a, b \in G$ en elke $\rho \in \mathbb{R}$

b Als N de verzameling nulvectoren (ook wel *nulgrootheden* genoemd) uit bovengenoemde vectorruimten is, dan is $G \backslash N$ een multiplicatieve commutatieve groep.

Notatie:

kleine latijnse letters stellen grootheden voor,
kleine griekse letters reële getallen,
grote latijnse letters verzamelingen.

Opmerking: Optelling van ongelijkwaardige grootheden is niet gedefinieerd.

1.2 *Voorbeelden.*

1 G is de verzameling van alle geordende paren reële getallen (ρ, φ) zodanig dat

$$(\rho_1, \varphi_1) \sim (\rho_2, \varphi_2) \underset{\text{def}}{\leftrightarrow} \varphi_1 = \varphi_2$$

$$(\rho, \varphi) + (\mu, \varphi) \underset{\text{def}}{=} (\rho + \mu, \varphi)$$

$$\mu(\rho, \varphi) \underset{\text{def}}{=} (\mu\rho, \varphi)$$

$$(\rho_1, \varphi_1) \cdot (\rho_2, \varphi_2) \underset{\text{def}}{=} (\rho_1\rho_2, \varphi_1\varphi_2)$$

2 Het kgms-stelsel

Elke grootheid is te schrijven in de gedaante

$$\rho \text{ kg}^{\alpha} \text{ m}^{\beta} \text{ s}^{\gamma}$$

waarbij

α β γ gehele getallen zijn en ρ een geheel getal

$$\rho_1 \text{kg}^{\alpha_1}\text{m}^{\beta_1}\text{s}^{\gamma_1} \sim \rho_2 \text{kg}^{\alpha_2}\text{m}^{\beta_2}\text{s}^{\gamma_2} \underset{\text{def}}{\leftrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$$

$$\rho_1 \text{kg}^{\alpha}\text{m}^{\beta}\text{s}^{\gamma} + \rho_2 \text{kg}^{\alpha}\text{m}^{\beta}\text{s}^{\gamma} \underset{\text{def}}{=} (\rho_1 + \rho_2)\text{kg}^{\alpha}\text{m}^{\beta}\text{s}^{\gamma}$$

$$\rho(\mu\text{kg}^{\alpha}\text{m}^{\beta}\text{s}^{\gamma}) \underset{\text{def}}{=} (\rho\mu)\text{kg}^{\alpha}\text{m}^{\beta}\text{s}^{\gamma}$$

$$\rho_1 \text{kg}^{\alpha_1}\text{m}^{\beta_1}\text{s}^{\gamma_1} \cdot \rho_2 \text{kg}^{\alpha_2}\text{m}^{\beta_2}\text{s}^{\gamma_2} \underset{\text{def}}{=} (\rho_1\rho_2)\text{kg}^{\alpha_1+\alpha_2}\text{m}^{\beta_1+\beta_2}\text{s}^{\gamma_1+\gamma_2}$$

Soms geeft men gemakshalve veelgebruikte grootheden nieuwe namen, zoals $\text{kg}^1\text{m}^1\text{s}^{-2} = \text{N}$.

3 G bestaat uit de complexe getallen met dien verstande, dat er twee nullen zijn: een reële nul en een imaginaire nul. Twee grootheden heten gelijkwaardig als ze hetzij allebei reëel, hetzij allebei zuiver imaginair zijn. Verder geldt optelling en vermenigvuldiging als bij gewone complexe getallen, met dien verstande dat alleen gelijkwaardige grootheden opgeteld worden.

4 G bestaat uit de complexe getallen met dien verstande dat er oneindig veel nullen zijn.

Twee grootheden heten gelijkwaardig als ze lineair afhankelijk zijn over $\mathbb{R}$ (d.w.z. $a \sim b \leftrightarrow$ er zijn twee reële getallen ρ, μ, niet beide nul, zó dat $\rho a = \mu b$). Verder geldt de gewone optelling en vermenigvuldiging. Hier is het optellen van ongelijkwaardige grootheden mogelijk en zinvol.

5 $G = \mathbb{R}$. Alle getallen zijn gelijkwaardig (er is dus maar één klasse). De gewone optelling en vermenigvuldiging geldt.

Opm. Een bijzonderheid is wel het optreden van meerdere nullen. Zo zijn bijv. in voorbeeld (2) de grootheden Okg en Om essentieel verschillend. Later wordt aangetoond dat het toegestaan is de nullen met elkaar te identificeren, maar dat betekent een verarming van de structuur.

1.3 Belangrijk zijn de resultaten over eenheden en maatgetallen.

Als a geen nulgrootheid is dan kan men elke ermee gelijkwaardige grootheid x schrijven in de vorm $x = \rho a$. Men noemt dan a een eenheid en ρ het maatgetal van x bij die eenheid. In principe kan elke $a \notin N$ als eenheid genomen worden. Toch zou het niet verstandig zijn voor elke groothedenklasse willekeurig een eenheid te nemen, want men zou toch wel graag willen dat het produkt van twee eenheden weer een eenheid is. Dat betekent in de praktijk: Als x het maatgetal ρ bij de eenheid a heeft en y het maatgetal μ bij de eenheid b, dan zou het wel erg prettig zijn als $x \cdot y$ het maatgetal $\rho\mu$ bij de eenheid $a \cdot b$ heeft. Dat dit niet zomaar vanzelfsprekend is blijkt uit voorbeeld (3). Het is duidelijk dat 1 en i eenheden zijn. Het zou dan ook wel prettig zijn als ook $1 \cdot 1$, $1 \cdot \mathrm{i}$ en $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}$ eenheden waren. Maar dat is niet het geval: $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ is geen eenheid.

Bij voorbeeld (1) is het wel mogelijk: De paren van de gedaante $(1, \alpha)$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ zijn eenheden, die met elkaar vermenigvuldigd weer eenheden zijn. In dat geval spreekt men van coherente eenheden.
Ook in voorbeeld (2) is het mogelijk coherente eenheden te kiezen: Alle grootheden van de vorm

$$1\ \mathrm{kg}^{\alpha} \cdot \mathrm{m}^{\beta} \cdot \mathrm{s}^{\gamma}$$

Definitie: Een deelverzameling E van het groothedenstelsel heet verzameling van coherente eenheden als geldt:

1 $a, b \in E \Rightarrow a \cdot b \in E$

2 $E \cap \mathrm{N} = \emptyset$

3 In elke groothedenklasse ligt precies één eenheid.

Bewezen kan nu worden dat bij een gegeven coherente eenhedenverzameling E elk element $x \in G$ op precies één manier geschreven kan worden als het produkt van een reëel getal (maatgetal) en een eenheid.

2.1 De moraal van mijn verhaal is nu samen te vatten in twee punten:

1 **Grootheid = maatgetal · eenheid**

2 **Het is mathematisch volstrekt correct, want gegrond op een degelijk axiomastelsel, om in formules die daartoe aanleiding geven (zoals $O = l \cdot b$) voor de variabelen grootheden te substitueren.**

2.2 Dit is niet direct de moraal van Griesel's verhaal. Hij doet veel meer, maar nogmaals, dat moet u zelf maar lezen. Om een indruk te geven wat hij in zijn artikel doet geef ik daarvan een inhoudsopgave.

Einleitung

§ 1 Axiomensystem für Grössensysteme
- a Definition eines Grössensystems
- b Beispiele (Modelle) für Grössensysteme

§ 2 Folgerungen für rationale Operationen

§ 3 Grössenklassen, Dimensionsgruppe, Isomorphie

§ 4 Einheiten, Masszahlen, Absolutbeträge
- a Mengen kohärenter Einheiten
- b Masszahlfunktionen
- c Absolutbeträge
- d Die verallgemeinerte Einheitengruppe

§ 5 Die anordnungsfähigen Grössensysteme
- a Angeordnete Grössensysteme
- b Der Hauptsatz für anordnungsfähige Grössensysteme
- c Folgerungen für anordnungsfähige Grössensysteme

§ 6 Die Analysis in Grössensysteme
- a Umgebungen und Intervalle
- b Stetige Funktionen
- c Differentialrechnung
- d Integralrechnung

§ 7 Exponentialfunktion und Logarithmus
- a Die Exponentialfunktion
- b Der Logarithmus

§ 8 Die Theorie der unendlichen Reihen
- a Reihen mit konstanten Gliedern
- b Potenzreihen

§ 9 Die trigonometrischen Funktionen
- a Trigonometrische Funktionen in Grössensystemen ohne Grössenklassen zweiter Ordnung
- b Trigonometrische Funktionen in beliebigen Grössensystemen

§ 10 Grössensysteme mit rationaler oder reeller Potenz
- a Definition und einfache Folgerungen
- b Die Existenz einer Basis in Grössensystemen mit rationaler oder reeller Potenz
- c Rationale Potenzhüllen
- d Reelle Potenzhüllen

2.3 De oude Grieken hadden een geniale maar ingewikkelde manier bedacht om met grootheden te rekenen omdat zij er niet toe konden komen om bijvoorbeeld lengtes met elkaar te vermenigvuldigen. De huidige schrijfwijze van de stelling van Pythagoras zou hen dan ook onbegrijpelijk en zinloos voorgekomen zijn.

Hopelijk heb ik met dit stuk ertoe bijgedragen wiskundecollega's er van te

overtuigen dat 7 meter delen door 33 seconden een legitieme zaak is. Iets wat onze natuurkundecollega's allang schenen te weten maar hen konden we niet begrijpen omdat zij ons geen axiomatische opbouw lieten zien. Om alle misverstanden te voorkomen: De methode die ik aan het begin beschreef als 'mathematisch' is niet fout. Zij is zelfs goed te funderen. Maar in de natuurkunde is zij wel onhandig en omslachtig.

2.4 Tot slot een vraag: Wat Griesel doet in zijn artikel is puur wiskunde. Wie moeten er op school zich met het rekenen met grootheden bezig houden, wiskunde- of natuurkunde-leraren?
Wie weet, misschien kunnen ze het in de toekomst ook eens samen doen . . .[1]

[1] Mag ik in dit verband wijzen op het artikel Economie en Wiskunde (p. 369) en de voetnoot op p. 374? (AMK)

Economie en Wiskunde

H. BOLT

Rhenen

Enkele aantekeningen bij dr. A. Heertje: De Kern van de Economie, twee delen

Uit het 'woord vooraf':

. . . in de huidige vorm is dit boek (deel I) niet alleen geschikt voor de H.B.S. A, maar ook voor het H.E.A.O. Ten behoeve van het Atheneum A zal het worden gevolgd door een tweede deel . . . de modernisering van het economisch onderwijs op de middelbare school vereist een voortgezette inspanning van allen, die onder deze modernisering hun schouders willen zetten . . .

Na een uitgebreide doch zakelijke omschrijving van een aantal begrippen, die bij de aanvang van de studie in de economie een belangrijke rol gaan spelen, volgt de aanduiding van die begrippen door letters:

Y: het nationaal inkomen (de netto-toegevoegde waarde);

C: de consumptie (de consumptiegoederen);

S: de besparingen (het niet-consumptieve deel van het inkomen);

W: de waarde van het netto nationaal produkt;

I: de netto investeringen.

De onderlinge samenhang wordt vastgelegd in drie zogenaamde macro-economische identiteiten:

$$Y = C+S$$

$$W = C+I$$

$$W = Y$$

en de hieruit voortvloeiende definitie-vergelijking $I = S$. Dit 'vastpennen' van begrippen in identiteiten wordt gerechtvaardigd door enkele definities, die ontleend zijn aan de nationale rekeningen.

Door uit te gaan van een rechthoekig assenstelsel, waarop W en $C+I$ in dezelfde eenheden worden gemeten, krijgt men als grafiek van de identiteit $W = C+I$ de '45°-lijn' door de oorsprong en komen ook andere lineaire betrekkingen aan de orde. Met een aantal opgaven, waarin de leerling o.a. tabellen moet ontwerpen en de daarbij behorende grafieken moet tekenen, wordt het derde hoofdstuk afgesloten.

In hoofdstuk 7 komt de indifferentiekromme aan de orde: de verzameling van punten, die goederencombinaties voorstellen welke voor de consument eenzelfde nut opleveren. De vorm van de kromme is afgeleid van een 'ervaringsregel' en lijkt op de in het eerste kwadrant voorkomende tak van de hyperbool $xy = c$, althans voorzover het een combinatie van twee goederen betreft. Tezamen met de budgetlijn (afhankelijk van inkomen en prijzen) wordt op de indifferentiekromme de voor de consument optimale toestand bepaald.
De volgende hoofdstukken behandelen nog een aantal curven, die met behulp van een tabel worden ontworpen. Zo wordt het verband tussen de prijs en de gevraagde hoeveelheid van een bepaald goed de 'vraagfunctie' genoemd en de grafiek heet dan: vraagcurve. Zo spreekt men van kostenfunctie en kostencurve, aanbodfunctie en aanbodcurve enz. Het verschuiven van een curve en het snijden van curven komt ter sprake.
In hoofdstuk 10 treedt voor de eerste maal de tweedegraadsfunctie op en komt ook meteen de praktische betekenis van de eerste afgeleide naar voren: prijs: p, afzet: x, vergelijking van een (rechte) afzetcurve: $p = ax+b$, totale opbrengst: $R = px = ax^2+bx$, bij de maximumwaarde van de totale opbrengst behoort de 'lijn van de marginale opbrengst' met vergelijking: $R' = 2ax+b$.
Voor het toenemen van verschillende grootheden wordt in de hoofdstukken 12 13 en 14 de delta-notatie gebruikt, zoals de extra consumptie: ΔC, het extra inkomen: ΔY enz. Het sommeren van het extra inkomen over een zeer groot aantal perioden eist de sommatie van een meetkundige rij met eerste term ΔI en reden $c(=\Delta C/\Delta Y)$.
Het eerste deel wordt afgesloten met twee aanhangsels:
A: de grafische voorstelling (het rechthoekig coördinatenstelsel in het platte vlak en in de ruimte; rechten)
B: statistiek (frequentieklassen, correlatie, kolommendiagrammen en polygonen).

Het (wiskundig) boeiende van DE KERN VAN DE ECONOMIE is het werken met *modellen*: uit zorgvuldig gekozen veronderstellingen worden de conclusies gezocht; het in acht nemen van de daarbij optredende beperkende voorwaarden is het meest interessante. Men moet zich echter afvragen of de leerling, die geen wiskunde in het studiepakket heeft opgenomen, wel voldoende basisstof heeft verwerkt om de techniek van de genoemde onderzoeken enigszins te kunnen volgen.
In het eerste hoofdstuk van deel 2 komt nog eens weer de tweedegraadsfunctie voor met de eerste en de tweede afgeleide daarvan. Dit geeft aanleiding tot het volgende stelsel:

$$p = aq+b$$
$$K = mq+n$$
$$R = pq$$
$$W = R-K$$

$$\frac{dR}{dq} = \frac{dK}{dq}$$

$$\frac{d^2R}{dq^2} < \frac{d^2K}{dq^2}$$

waarin de letters de volgende betekenis hebben:
p: de prijs; q: de afgezette hoeveelheid; $a(< 0)$, $b(> 0)$, $m(> 0)$ en $n(> 0)$ zijn constanten; K: de totale kosten; R: de totale opbrengst; W: de totale winst. Het doel in dit (micro-economisch) model is uit de gegevens de evenwichtsprijs af te leiden als de winst maximaal is.

Bij de bespreking van enkele algemene aspecten van modellen komen in hoofdstuk 3 nog eens weer begrippen zoals definitiegebied, strijdigheid van betrekkingen en de eenduidigheid (en de niet-eenduidigheid) van oplossingen naar voren. Een variatie op een reeds eerder besproken model geeft in hoofdstuk 3 een aantal nogal ingewikkeld lijkende betrekkingen vanwege het veelvuldig gebruik van indices. Echt moeilijk wordt het vanaf hoofdstuk 4. Daar treedt allereerst de produktie W_t in een bepaalde periode t op als (produktie-)functie van de beide produktiefactoren kapitaal K_t en arbeid L_t : $W_t = f(K_t, L_t)$. Eén van de mogelijke functies is:

$$W_t = \alpha K_t^\beta . L_t^{1-\beta}$$

met de gevolgen:

$$\frac{\partial W_t}{\partial K_t} = \alpha\beta K_t^{\beta-1} . L_t^{1-\beta}$$

$$\frac{\partial^2 W_t}{\partial K_t^2} = \alpha\beta(\beta-1)K_t^{\beta-2} . L_t^{1-\beta} < 0$$

$$\frac{K_t}{W_t} \cdot \frac{\partial W_t}{\partial K_t} = \beta \quad \text{en} \quad \frac{L_t}{W_t} \cdot \frac{\partial W_t}{\partial L_t} = 1-\beta$$

en de conclusie: 'de som van de beide produktie-elasticiteiten is gelijk aan 1'. De driedimensionale voorstelling van zo'n functie van twee afhankelijken komt nog duidelijker in de belangstelling in het zesde hoofdstuk: 'bijzondere afleiding van de vraagfunctie' waar het probleem neerkomt op het maximeren van de nutfunctie $U = U(x, y)$ met de beperkende voorwaarde $i = p_1 x + p_2 y$ (de budgetvergelijking). Hoogtelijnen op de 'nutberg', geprojecteerd op het (x, y)-grondvlak geven de indifferentiekrommen ('iso-nutkrommen'). Voorbeeld van een nutfunctie is:

$$U(x, y) = (x+1)^{\frac{1}{2}} . (y+1)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (x > 0, y > 0)$$

grensnut:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} . (y+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{y+1}}{2\sqrt{x+1}},$$

indifferentiekrommen (U is constant):

$$\sqrt{x+1}\,.\sqrt{y+1}-1 = c, \text{ dus } (x+1)(y+1) = c';$$

de marginale substitutieverhouding van x en y (meetkundig: de helling van de indifferentiekromme) is gelijk aan het quotiënt van de grensnutten van x en y eist partieel differentiëren:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}} \text{ hetgeen hier oplevert: } \frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{x+1};$$

voorwaarde voor convexiteit van de indifferentiekromme geeft in dit geval:

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{y+1}{x+1}\right] > 0, \text{ dus } \frac{2(y+1)}{(x+1)^2} > 0;$$

de helling van de budgetlijn volgt uit de budgetvergelijking en wordt, om het evenwichtspunt (x^*, y^*) te vinden, gelijkgesteld aan de marginale substitutieverhouding. Dit leidt tot het stelsel:

$$\begin{cases} y = \dfrac{p_1}{p_2}(x+1)-1 \\ p_1 x+p_2 y = i \end{cases};$$

oplossing van dit stelsel levert uitdrukkingen van de hoeveelheden x en y in de prijzen p_1 en p_2 en het inkomen i, hetgeen, bij het constant houden van bijvoorbeeld p_2 en i weer aanleiding geeft tot de functies $x = f(p_1)$ en $y = g(p_1)$.
De algemene methode voor de oplossing van het vorige probleem wordt ook gegeven (bekend als de methode van Lagrange):

$$L(x, y, \lambda) = [(x+1)^{\frac{1}{2}}\,.\,(y+1)^{\frac{1}{2}}-1]-\lambda(p_1 x+p_2 y-i)$$

met daarna het stelsel

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = 0 \text{ enzovoort.}$$

De laatste zestig bladzijden van het tweede deel van DE KERN VAN DE ECONOMIE (Monopolie, Oligopolie, Micro- en macro-economische beslissingsmodellen) bieden de leerlingen nog een hoeveelheid lees- en leerstof, waarbij een grote wiskundige vaardigheid onontbeerlijk is.
Een mogelijke pakketkeuze op het Atheneum is: Economie, Nederlands, een vreemde taal en nog een paar vakken, die geen enkele binding hebben met de

wiskunde. Wat moet een leerling kiezen als de vooropleiding behoorlijk is afgesloten voorzover het de niet-exacte vakken betreft? Zwak in de natuurkunde en onvoldoende in de wiskunde zijn toch geen redenen om de leerling af te wijzen of 'gericht' te bevorderen naar het havo? Overigens: welke kans maakt de leerling, die wél behoorlijk was in wiskunde, maar niet Wiskunde I kiest? We zullen moeten zien; ik weet het niet.
Nogmaals uit het 'woord vooraf': . . . de modernisering van het economisch onderwijs op de middelbare school vereist een voortgezette inspanning van allen, die onder deze modernisering hun schouders willen zetten . . . . We zullen de schouder er onder *moeten* zetten: de economen én de wiskundigen en behalve inspanning zal ook *samenwerking* worden vereist. Economie zonder wiskunde is een onmogelijkheid en voor de wiskundigen mag de economie geen onbekend gebied zijn. Wiskundedocenten raad ik met klem aan de beide delen van DE KERN VAN DE ECONOMIE te bestuderen; zij bewijzen er hun leerlingen een dienst mee!

Naschrift

C. Krooshof

Het is belangrijk dat collega Bolt ons een overzicht heeft gegeven van de wiskundige voorkennis die wordt verondersteld bij het gebruik van de beide delen van DE KERN VAN DE ECONOMIE door Prof. Heertje.
We worden hier geconfronteerd met een zeer zwak punt in ons onderwijs: er is een Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, er is een Commissie Modernisering Leerplan Natuurkunde, er is een Prof. Heertje; ze hebben te maken met het opstellen van een leerplan voor hun eigen vak, maar de natuurkunde en de economie blijken talrijke dwarsverbindingen met de wiskunde te hebben en nu worden die dwarsverbindingen van de natuurkunde en de economie uitgelegd, maar ze blijken geen aansluiting te kunnen vinden bij het bouwwerk van de wiskunde. Daardoor blijven ze in de lucht hangen of moeten weer afgebroken worden.
Wie de eisen van de Commissie Modernisering Leerplan Natuurkunde in het interimrapport heeft gezien, bijvoorbeeld alleen al voor de wiskunde van de vierde klas Atheneum, die vraagt zich af of deze commissie ooit wel geweten heeft van het bestaan van het leerplan voor de wiskunde.
Ook de wiskunde die in de boeken van Prof. Heertje is ingebouwd veronderstelt hier en daar, maar vooral in het tweede deel kennis bij de leerlingen die ze, als er volgens het leerplan gewerkt wordt, op het tijdstip dat ze in de economie nodig is nog niet hebben of die ze zelfs in het v.w.o. niet eens zullen krijgen. Wanneer collega Bolt aandringt op samenwerking tussen wiskundeleraren en leraren economie dan heeft hij daarin gelijk, maar deze samenwerking kan niet bestaan in het toegeven aan te hoge eisen van de kant van de economie.
Het voorlopige Leerplan Wiskunde voor de Rijksscholen moet zeker niet op korte termijn door een ander worden vervangen. Laten we eerst eens kijken

hoe we het kunnen verwerkelijken. Als het over enkele jaren aan herziening toe is dan zal er door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde contact moeten worden opgenomen met de collega's voor natuurkunde en de economie.[1] Dan kan bekeken worden welke wensen van die zijde uitvoerbaar zijn. Voorlopig zullen zij die van hun vak uit wensen hebben betreffende de wiskunde zich moeten neerleggen bij het feit dat er een leerplan wiskunde is, dat vrij uitgebreid voorschrijft in welke leerjaren bepaalde onderdelen aan de beurt komen. In onderling overleg zal daar natuurlijk wel eens van kunnen worden afgeweken, maar grote afwijkingen moet men toch niet eisen.
Inmiddels kan er wel alvast een begin worden gemaakt met het verkennen van elkaars terreinen. Het artikel van collega Bolt is daarvan een goed begin.

Vakantiecursus 1971

voor leraren V.W.O. en V.H.M.O. in de exacte vakken en andere belangstellenden

Het Mathematisch Centrum organiseert dit jaar voor de 25e maal een Jubileum-Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden en wel in

AMSTERDAM op woensdag 11 en donderdag 12 augustus 1971 en in
EINDHOVEN op donderdag 12 en vrijdag 13 augustus 1971

Onderwerp: *„De ontwikkeling van de wiskunde in de afgelopen 25 jaar"*.

Als sprekers zullen optreden (gelijkelijk in Amsterdam en Eindhoven):
1e dag: *Prof. dr. H. Freudenthal* en *Prof. dr. F. van der Blij*
2e dag: *Prof. dr. J. J. Seidel*, *Prof. drs. J. J. de Jongh* en *Prof. dr. ir. A. van Wijngaarden.*

Kosten: Evenals voorgaande jaren zullen deze *f* 5,— bedragen, incl. de te verstrekken syllabus.

Aanmelding: Schriftelijk bij het sceretariaat van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O., tel. 020-947272, alwaar men ook nadere inlichtingen kan verkrijgen.

[1] Het lijkt me goed hier te melden, dat er al gesprekken tussen leden van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en van de zustercommissie voor Natuurkunde zijn geweest in een daartoe ingestelde werkgroep (AMK).

Practica bij meetkunde met vectoren

G. A. OOSTERHOLT

Leiden

Bij het experiment 'Meetkunde met vectoren' wordt de leraar vaak voor het probleem geplaatst de leerlingen vertrouwd te maken met nieuwe en ongewoon abstracte begrippen.
De bestudering van de theorie uit een boek kan soms vruchtbaar aangevuld worden door een practicum, waarin de onderwerpen nog eens vanuit een wat andere hoek worden bekeken en slechts een minimum aan gegevens wordt verschaft. De leerlingen komen hierdoor soms beter tot het besef hoe de theorie in elkaar zit en bouwen er zelf wat aan mee.
In het practicum over uitwendige produkten worden direct consequenties getrokken uit de definitie en worden toepassingen in de stereometrie gemaakt. Het practicum over determinanten van de orde 3 is ontstaan uit de behoefte om de theorie zo direct mogelijk uit de definitie af te leiden. Slechts de begrippen afhankelijkheid, onafhankelijkheid en basis worden voor getalvectoren bekend verondersteld. De getallenvoorbeelden functioneren hier min of meer als schakels; toen de leerlingen dit practicum gemaakt hadden, moesten ze § 1.5 van Westermann, Meetkunde met vectoren, deel 2 ermee vergelijken en vervolgens meer oefenstof in § 1.6 doorwerken.
De beide practica zijn gegeven in een 6β gymnasiumklas die op de wiskundeles reeds was ingesteld op een grote mate van zelfstudie.
De werkhouding van deze klas was zonder restrictie voortreffelijk te noemen. De practica werden met grote aandacht ter hand genomen en als een leidraad beschouwd waardoor men er zelf achter kon komen; aangeboden hulp werd meer dan eens op sportieve wijze van de hand gewezen: 'Ik zoek het liever zelf uit.'
De leerlingen waren geheel vrij in de vorming van groepen; samenwerking met meer dan drie kwam echter weinig voor, vermoedelijk vanwege het zeer intense contact dat bij het verwerken nodig is, wil het vruchtbaar zijn. Enkelen gaven de voorkeur aan het zelf doen zonder contact met de anderen; de zwakkeren onder hen raakten echter achterop en kregen dan wat extra aandacht om niet te lang op een bepaald punt te blijven hangen.
Afzonderlijk huiswerk werd niet opgegeven; de oplossingen kwamen op een geschikt moment op het bord in de vorm van antwoorden of uitgewerkte op-

lossingen. Nadat aansluiting aan het boek was verkregen werd een hoofdstuk afgesloten en een proefwerk gegeven; het practicum werd dus niet op zichzelf met een cijfer gehonoreerd.

Practicum over uitwendig produkt

Afhankelijkheid

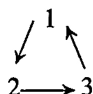
We kiezen twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Schrijf nog eens de gevallen op waarin $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ afhankelijk is; betrek ook de nulvector erin.
Laat nu in R_2 zien:

$$\{\underline{a}, \underline{b}\} \text{ is afhankelijk} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Definitie. Het getal $a_1 b_2 - a_2 b_1$ heet in R_2 de *determinant* van $\{\underline{a}, \underline{b}\}$.
In R_3 kunnen we 3 determinanten van deze soort bij $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ definiëren:

$$\Delta_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \qquad \Delta_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \qquad \text{en} \qquad \Delta_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

welke uit elkaar kunnen ontstaan door verwisseling van de indices



Definitie. Onder het *uitwendig produkt* van $\underline{a}$ en $\underline{b}$ in R_3 verstaan we de *vector* met kentallen $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$. Notatie: $\underline{a} \times \underline{b}$.

Opdrachten. Bewijs de volgende uitspraken, als $a \times \underline{b} = \underline{u}$.

1 $\underline{a} = \underline{o} \vee \underline{b} = \underline{o} \Rightarrow \underline{u} = \underline{o}$.

2 $\underline{a} \neq \underline{o} \wedge \underline{b} \neq \underline{o} \wedge \underline{a} = \alpha\underline{b} \Rightarrow \underline{u} = \underline{o}$.

3 $\underline{a} \neq \underline{o} \wedge \underline{b} \neq \underline{o} \wedge \underline{u} = \underline{o} \Rightarrow \underline{b} = \alpha\underline{a}$. Als je het bewijs niet helemaal zelf kunt vinden, vergelijk dan met blz. 128/129.

Stelling 4.5.1 is nu bewezen.

4 Bewijs: $(\underline{a}, \underline{u}) = 0$ en $(\underline{b}, \underline{u}) = 0$. Wat betekent dit meetkundig?

5 Gebruik de vorige opdracht om een normaalvector te berekenen van a: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\underline{b}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6 V: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bereken een normaalvector van V en schrijf een vergelijking van V op.

7 Bepaal een parametervrst. van de normaal door O op V:

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

8 Bepaal de orthogonale projectie van P: $\begin{pmatrix}10\\-7\\3\end{pmatrix}$ op vlak V van opdr. 7.

9 $\underline{n}$ en $\underline{m}$ zijn respectievelijk normaalvector van V en W, $\underline{u}=\underline{n}\times\underline{m}$. Wat kun je van V en W zeggen als $\underline{u}=\underline{o}$?
Als V en W niet parallel zijn, dan is $\underline{u}$ een richtvector van $V\cap W$. Bewijs dit stereometrisch.

10 Bepaal $V\cap W$ als V: $x_1+2x_2-3=0$ en W: $x_2-x_3=0$ op diverse manieren.

De *lengte* van $\underline{u}$ is door uitwerking te vinden:

$$\|\underline{u}\|^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2=(\ldots)^2+\ldots=\ldots=\|\underline{a}\|^2\cdot\|\underline{b}\|^2-(\underline{a},\underline{b})^2=$$
$$=\|\underline{a}\|^2\cdot\|\underline{b}\|^2\cdot\sin^2\angle(\underline{a};\underline{b})$$

zodat

$$\|\underline{u}\|=\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|\sin\angle(\underline{a};\underline{b}) \qquad (1).$$

11 Controleer dat (1) in overeenstemming is met opdracht 3 en stelling 4.5.1.

12 Als $\{\underline{a},\underline{b}\}$ onafhankelijk is, stelt $\|\underline{u}\|$ de oppervlakte voor van het parallelogram met de volgende hoekpunten (plaatsvectoren): $\underline{o}$, $\underline{a}$, $\underline{a}+\underline{b}$ en $\underline{b}$.

13 Vergelijk $(\underline{a},\underline{b})$ en $\|\underline{a}\times\underline{b}\|$ als functies van $\angle(\underline{a};\underline{b})$, wanneer $\underline{a}$ en $\underline{b}$ constante lengten hebben.

14 Bereken $\underline{e}_1\times\underline{e}_2$; $\underline{e}_2\times\underline{e}_1$; $\underline{e}_2\times\underline{e}_3$; $\underline{e}_3\times\underline{e}_2$; $\underline{e}_3\times\underline{e}_1$; $\underline{e}_1\times\underline{e}_3$.

De resultaten van 14 (anti-commutativiteit) geven aanleiding tot het stellen van de definities op blz. 131 en 132.
Maak aansluitend nog de opgaven 8, 9 en 10 van § 4.6.

Practicum over determinanten van de orde 3

Om het schrijfwerk te vereenvoudigen gebruiken we voor de getallenvector $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ de notatie $\underline{a}$.

Definitie

$\Delta(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ of $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ is een *getal*, dat te bepalen

is met behulp van het volgende schema:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & \text{negatief} \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & \text{positief} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta = {} & a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - \\ & -(a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1) \end{aligned} \qquad (1)$$

D1 Stelling: Als twee van de vectoren gelijk zijn is de determinant gelijk aan 0.

D2 Stelling: $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}+\lambda\underline{d}) = \Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})+\lambda(\underline{a}, \underline{b}, \underline{d})$.

Opdracht 1 Bewijs D1 en D2 door uitschrijven via (1).

D3 Stelling: Een determinant verandert niet van waarde als een veelvoud van één van zijn vectoren bij een der andere vectoren wordt opgeteld.

Opdracht 2 Herleid $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}+\lambda\underline{a})$ met D2 en D1 tot $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

Toepassing: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ Tel $2\underline{a}$ bij $\underline{c}$ op: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -48.$

Opdracht 3

Vereenvoudig $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -18 & 4 & -2 \\ -10 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

D4 Stelling: Als $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ afhankelijk is dan is $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 0$.

Opdracht 4 Bewijs D4 als volgt:

$$\exists \lambda, \mu, \nu \neq 0, 0, 0 : \lambda\underline{a}+\mu\underline{b}+\nu\underline{c} = \underline{o}.$$

Stel b.v. $\lambda \neq 0$, dan kan $\underline{a}$ worden uitgedrukt in $\underline{b}$ en $\underline{c}$. Vul dat in Δ in en pas D2 en D1 toe.

Opdracht 5 Als $\underline{a}$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{c}$ $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, laat dan zien dat $\underline{c}$ in $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is uit te drukken en dat $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 0$.

Opdracht 6 $\underline{a}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\underline{c}$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Controleer dat $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \neq 0$. Probeer vervolgens λ, μ en ν op te lossen uit: $\lambda\underline{a}+\mu\underline{b}+\nu\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dezelfde opgave voor $\lambda\underline{a}+\mu\underline{b}+\nu\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respect. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Is $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ nu afhankelijk of onafhankelijk?

We kunnen nu wel vermoeden dat stelling D4 omkeerbaar zal zijn.

D5 Stelling: $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 0 \Rightarrow \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ is afhankelijk.

Opdracht 7 Stel $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 0$ en $\underline{x} = x_1\underline{a}+x_2\underline{b}+x_3\underline{c}$. Bewijs met D2 en D1: $\Delta(\underline{x}, \underline{b}, \underline{c}) = 0$.

Opdracht 8 Met de gegevens van opdracht 7 nemen we

$$\underline{y} = y_1\underline{a}+y_2\underline{b}+y_3\underline{c} \quad \text{en} \quad \underline{z} = z_1\underline{a}+z_2\underline{b}+z_3\underline{c}.$$

Bewijs achtereenvolgens dat $\Delta(\underline{x}, \underline{y}, \underline{c}) = 0$ en $\Delta(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = 0$.

Gevolg: voor alle drietallen vectoren uit het opspansel van $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ geldt dat hun determinant 0 is.

Opdracht 9 Stel $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ is onafhankelijk, wat is dan het opspansel van deze vectoren?

Is de volgende uitspraak waar?

$$\exists\ \lambda, \mu, \nu: \lambda\underline{a}+\mu\underline{b}+\nu\underline{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ (vgl. opdracht 6).}$$

Denk hierbij aan het begrip basis!

Voor de vectoren uit opdracht 8 nemen we nu:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ en } \underline{z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Bepaal $\Delta(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ en vergelijk het resultaat met het gevolg van opdracht 8. Is D5 nu bewezen?

D6 Stelling: $\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \neq 0 \Leftrightarrow \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ is onafhankelijk.
Het bewijs volgt onmiddellijk uit D4 en D5.

We hebben nu stelling 1.5.3 van Westermann uit onze definitie bewezen. Lees zelf § 1.5 door en bedenk daarbij dat de uitwendige produkten op blz. 18 ook voor getalvectoren gedefinieerd zijn.

Korrel CLXXIV

100 000 *per seconde* [1]

Omringd door dood en doodsgevaar nam de man een adempauze en greep gretig naar de in Groningen van Wijdenes uitgegeven Wiskundige Tafels in vijf talen. Een toevlucht, een noodhaven.
Daar is de tabel voor het ontbinden van getallen. Probeer het eerst zelf met 9853; tijdrovend. Tabel V d geeft ineens 59×167.
Hoeveel is 16 faculteit? Een boel werk en grote kans op een rekenfout. Doch op blz. 267 ligt het antwoord klaar; ik rond het hier af op 21 miljoen maal miljoen.
Is er een priemgetal welks natuurlijke logaritme praktisch gesproken een geheel getal is? Weer staat een tabel gereed; van blz. 206 kies ik $\ln 1097 = 7{,}00033$, zeg dus 7.
Over 's mans transcendente plezier aan bolfuncties (V, i) en integraalsinus (V, g) zij hier gezwegen.
In de driehoeksmeting is den scholier welbekend dat de tangens van een rechte hoek oneindig groot is. Nu is het daarmee als met de mens: op het ogenblik dat hij de oneindigheid in zou gaan is hij er niet meer. Zo zou de tangens van $\pi/2$ oneindig zijn, als hij dan nog existeerde.
Indien we een hoekseconde verwijderd blijven van de rechte hoek, wat is dan de tangens? De tabel zegt op blz. (page, p. , S., pagina, hlm) 154

206264,806.

En als we 2 seconden onder $\pi/2$ blijven

103132,401.

De ene seconde maakt dus ruim 100000 verschil; zie ons opschrift. En ook: de tangens verdubbelt in die ene seconde; zo overpeinst de man.

Tj. S. Visser
Amsterdam

[1] Met enige wijziging overgenomen uit De Groene Amsterdammer van 30-5-1970.

Restklassen modulo p

Dr. G. BOSTEELS
Berchem

1 *Inleiding*. De relatie '... geeft bij deling door p dezelfde rest als ...' is een equivalentierelatie in de verzameling $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen en in de verzameling $\mathbb{Z}$ van de gehele getallen.
Het bewijs is gemakkelijk te leveren, maar over 't algemeen blijkt toch dat het opstellen van de equivalentieklassen geen voldoend duidelijk beeld oproept bij jonge leerlingen.
Het is mogelijk een duidelijker inzicht te geven met eenvoudig, zelf te maken materiaal. Inderdaad: we doen het onmiddellijk op $\mathbb{Z}$ en daartoe maken we een as (bijvoorbeeld een lint) waarop we enkele elementen van $\mathbb{Z}$ afbeelden, bijvoorbeeld -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Op een cirkelvormige schijf wordt nu -12, met een duimspijker, vastgemaakt op de rand van de schijf en het lint wordt nu op de schijf opgerold. De eenheid op het lint werd zo gekozen dat elk volgend cijfer samenvalt met een eindpunt van een kwadrant op de cirkel. De eindpunten a, b, c, d van de kwadranten dragen dan respectievelijk de cijfers:

in a: -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12
in b: -11, -7, -3, 1, 5, 9
in c: -10, -6, -2, 2, 6, 10
in d: -9, -5, -1, 3, 7, 11,

en de restklassen zijn nu duidelijk zichtbaar:

$$K_0 = \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} = \bar{0}$$
$$K_1 = \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\} = \bar{1}$$
$$K_2 = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\} = \bar{2}$$
$$K_3 = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\} = \bar{3}$$

In wat volgt zullen de streepjes boven het cijfer van de klassen weggelaten worden.

2 *Ter herinnering*. – In wat volgt onderstellen we enkele eigenschappen bekend en onder meer:

1° wat een groep is;
2° wat de orde van een groep $G, *$ is (de cardinaal van de verzameling G);
3° wat een deelgroep is;
4° dat de orde van een deelgroep steeds een deler is van de orde van de groep;
5° dat een cyclische groep door één enkel element kan voortgebracht worden;
6° dat grp x betekent de groep voortgebracht door het element x;
7° dat de orde van een element van een groep de macht is waartoe dit element moet verheven worden om het neutraalelement van de groep te vinden;
8° als het element x de groep voortbrengt, dan brengt het invers (of: symmetrisch element) ook deze groep voort.
Is dus 5 een voortbrengend element en $5^{-1} = 9$, dan is ook 9 een voortbrengend element;
9° dat als $a^x = y$ door definitie volgt dat x de a-logaritme van y is.

3 Wij onderzoeken nu de structuur van een restklassenverzameling, uitgerust met de klassieke wetten van optelling en vermenigvuldiging van elementen. We aanvaarden als bekend dat deze structuur een ring is met een nul en een één. Deze ring is commutatief. Wordt de ring voorgesteld door $R, +, \times$ dan is in het geval dat ons aanbelangt de notatie $\mathbb{Z}_n, +, \times$.
Een dergelijke ring heeft nuldelers als n een deelbaar getal is; is n een priemgetal, dan heeft de ring geen nuldelers.
We beperken ons, in wat volgt tot restklassenringen $\mathbb{Z}_p, +, \times$ waarbij p een priemgetal is.

4 Restklassenring modulo 2

Over deze ring valt niet veel te vertellen en we beperken ons bij het optekenen van de twee bewerkingstafels.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Daar nu 0 een opslorper is voor de bewerking × wordt de ×-tafel meestal eenvoudiger opgetekend en hier gereduceerd tot

×	1
1	1

Opmerkelijk is nu wel dat de structuur van $\mathbb{Z}_2, +, \times$ verder reikt dan een ringstructuur. Inderdaad is $\mathbb{Z}_2, +, \times$ een veld en dit zal voor elke $\mathbb{Z}_p, +, \times$ gelden (vergeet niet: p is priemgetal). Een dergelijk veld noemt men meestal een galoisveld.

Men bewijst trouwens dat deze velden de enige *eindige* velden zijn.
In wat volgt zullen we gemakshalve de verzameling $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ door F_p voorstellen.
Tafels voor optellingen zijn dus van de gedaante $\mathbb{Z}_p$, $+$ en de vermenigvuldigingstafels zijn van de gedaante F_p, $\times$.

5 Restklassen modulo 3

De bewerkingstafels zijn nu

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	1	2
1	1	2
2	2	1

Ook over dit veld wensen we verder niets te vertellen.

6 Restklassen modulo 5

De bewerkingstafels zijn nu

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Machten van de elementen van F_5

1e	1	2	3	4
2e		4	4	1
3e		3	2	
4e		1	1	

Element van de eerste orde: 1
Element van de tweede orde: 4
Elementen van de vierde orde: 2 en 3.
Merk op dat $2^{-1} \equiv 3$.
Merk op dat $\{1, 4\}$, $+$, $\times$ een deelveld is en dat F_5, $\times$ een cyclische groep is.
Dit laat je toe de vermenigvuldigingstabel op een van de volgende twee manieren op te tekenen:

×	1	3	4	2
1	1	3	4	2
3	3	4	2	1
4	4	2	1	3
2	2	1	3	4

×	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

(I)

of nog

×	2^0	2^3	2^2	2^1
2^0	2^0	2^3	2^2	2^1
2^3	2^3	2^2	2^1	2^0
2^2	2^2	2^1	2^0	2^3
2^1	2^1	2^0	2^3	2^2

×	3^0	3^3	3^2	3^1
3^0	3^0	3^3	3^2	3^1
3^3	3^3	3^2	3^1	3^0
3^2	3^2	3^1	3^0	3^3
3^1	3^1	3^0	3^3	3^2

(II)

Uit (II) blijkt nu duidelijk dat de groepen cyclisch zijn, want ze worden door een enkel element (2 of 3) voortgebracht.
Merk bovendien op dat uit (I) blijkt dat het voortbrengend element steeds op de nevendiagonaal staat en dat de klassen die op diagonalen, evenwijdig met deze nevendiagonaal liggen, steeds hetzelfde element optreedt. Voor hogere waarden van p zal dit een zeer eenvoudig middel opleveren om de vermenigvuldigingstabellen op te tekenen, van zodra de bovenrij bekend is.

7 Restklassen modulo 7

Wij hopen dat voor $\mathbb{Z}_7, +, \times$ de zaken even gunstig verlopen ... en dat er wellicht nog wat anders te ontdekken valt.
Het lijkt me wel onnodig de tabel voor de optelling op te tekenen. We weten dat het om een cyclische groep gaat en het uitschrijven van de eerste lijn laat ons toe zeer vlot en snel af te werken.
De vermenigvuldigingstabel voor F_7 is nu:

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

We zien vanzelfsprekend dadelijk de symmetrie ten opzichte van de hoofddiagonaal, wegens de commutativiteit van de vermenigvuldiging. Het uitrekenen van de produkten is wel niet moeilijk, maar niet zo prettig.
Nemen we echter een willekeurige horizontale lijn, zoals bijvoorbeeld 3–6–2–5–1–4 dan kunnen we toch opmerken dat de elementen behoren tot een rekenkundige rij waarvan het verschil het eerste element is, met dien verstande dat we blijven doorrekenen modulo 7. Zo is inderdaad $3+3 \equiv 6$, $6+3 \equiv 2$, $2+3 \equiv 5$, $5+3 \equiv 1$ en $1+3 \equiv 4$.
Deze eigenschap geldt voor elk horizontaal rijtje (en tevens ook voor elke kolom).
We kunnen dus de tafel zo maar uitschrijven, zonder ook maar een vermenigvuldiging uit te voeren.
Vergeten we dus niet dat we, in wat volgt, elke vermenigvuldigingstafel voor een F_p dadelijk kunnen uitschrijven.
Hoewel er symmetrie is ten opzichte van de hoofddiagonaal liggen de elementen

op evenwijdige lijnen met de diagonalen toch wel een beetje slordig verspreid. Daarom gaan we nu een eleganter voorstelling zoeken.
Herneem de tabel, maar met een andere volgorde voor de elementen:

×	1	3	2	6	4	5
1	1	3	2	6	4	5
3	3	2	6	4	5	1
2	2	6	4	5	1	3
6	6	4	5	1	3	2
4	4	5	1	3	2	6
5	5	1	3	2	6	4

De symmetrie ten opzichte van de hoofddiagonaal blijft vanzelfsprekend bestaan. Merk nu echter op dat op de nevendiagonaal alleen het element 5 optreedt en dat al de elementen op evenwijdige lijnen met deze nevendiagonaal identiek zijn. Zo kan je gemakkelijk de tabel herschrijven: heb je de eerste regel geschreven, dan volgt de tweede als een cyclische omwisseling daaruit, door eenvoudig een element op te schuiven. Probeer het even! Het is nu mogelijk een toestelletje te vervaardigen waarop je dadelijk de produkten kunt aflezen. Snijd twee cirkeltjes uit in bristolkarton, die om hun gemeenschappelijk middelpunt kunnen draaien. Bij de hoekpunten van de regelmatige ingeschreven zeshoek (7–1) zet je, op de rij af de getallen 1, 3, 2, 6, 4, 5 in deze volgorde. Moet je nu het produkt 3×4 maken, zet dan het getal 3 van de binnencirkel boven de 1 van de buitencirkel; op de buitencirkel lees je nu, onder de tweede factor (4) van het produkt, de uitkomst 5 af.
Controleer enkele produkten aan de hand van je toestelletje en je tabel! Onmiddellijk rijst nu de vraag: is dit de enig mogelijke schikking die zo'n fiine tabel oplevert?

Onderstaande tabel brengt het antwoord:

×	1	5	4	6	2	3
1	1	5	4	6	2	3
5	5	4	6	2	3	1
4	4	6	2	3	1	5
6	6	2	3	1	5	4
2	2	3	1	5	4	6
3	3	1	5	4	6	2

en hier prijkt nu 3 als enig element op de nevendiagonaal: voor de evenwijdigen met deze diagonaal, weer uitsluitend identieke elementen.
Bij deze mooie vorm heb je wel iets kwijtgespeeld: de rijtjes zijn nu niet langer rekenkundige rijtjes, althans niet bij een oppervlakkig bekijken. Bovendien heb je het raden naar de manier waarop je de elementen op het bovenste rijtje moet ordenen.
Bereken nu, steeds modulo 7, de machten van elk element van F_7.

macht van	1	2	3	4	5	6
1e	1	2	3	4	5	6
2e		4	2	2	4	1
3e		1	6	1	6	
4e			4		2	
5e			5		3	
6e			1		1	

Element van de eerste orde: 1
Element van de tweede orde: 6
Elementen van de derde orde: 2 en 4
Elementen van de zesde orde: 3 en 5
Merk op dat $3^{-1} \equiv 5$ en de groep kan dus zowel door het element 3 als door het element 5 voortgebracht worden, wat je effectief hebt kunnen constateren. Elementen van vierde of vijfde orde zijn er niet, daar de orde van de groep (6) niet deelbaar is door 4 of door 5.
Je kunt nu elk element afbeelden als een macht van 3 of als een macht van 5. Zo krijg je dan

1°	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
	1	3	2	6	4	5
2°	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5
	1	5	4	6	2	3

en de laatste twee vermenigvuldigingstafels kan je dus herschrijven met uitsluitend gebruik van de machten van 3 of 5. Je hebt trouwens wel al opgemerkt dat de getallen 3 en 5 precies die elementen zijn van de nevendiagonalen. Tevens blijkt ook hier weer dat de groep cyclisch is en dat

$$\text{grp } 3 \cong \text{grp } 5.$$

Wegens de bijectie van de elementen op machten van 3 (of van 5) kan je nu ook een logaritmenstelsel opbouwen.
In de basis 3:

$$\log 1 = 0 \qquad \log 2 = 2 \qquad \log 3 = 1$$
$$\log 4 = 4 \qquad \log 5 = 5 \qquad \log 6 = 3$$

en om bijvoorbeeld 6×3 uit te rekenen kan je schrijven:

$$\log(6 \times 3) = \log 6 + \log 3 = 3 + 1 = 4 = \log x$$

en

$$x = 4$$

wat juist is, want $6 \times 3 = 18$ of gelijk 4 (modulo 7).
In de basis 5:

log 1 = 0	log 2 = 4	log 3 = 5
log 4 = 2	log 5 = 1	log 6 = 3

waarbij je de klassieke eigenschappen van de logaritmen herkent: log 1 = 0 en logaritme van de basis = 1.
In feite is het rekentoestelletje van hierboven niets anders dan een gecamoufleerde vorm van rekenliniaal!
Uit de algemene theorie over groepen kan je, in verband met het bovenstaande tabelletje van de machten ook zeggen dat

$\{1\}, \times; \quad \{1, 6\}, \times$ en $\{1, 2, 4\}, \times$ deelgroepen zijn.

8 Rekenen modulo 11

De vermenigvuldigingstafel ziet er als volgt uit:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Het tabelletje werd opgesteld aan de hand van de eigenschap van de rekenkundige rijen.
Je kunt weer zoeken naar meer elegante voorstellingen. Daartoe bereken je aan de hand van voorgaande tafel, de opeenvolgende machten van de elementen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2e		4	9	5	3	3	5	9	4	1
3e		8	5	9	4	7	2	6	3	
4e		5	4	3	9	9	3	4	5	
5e		10	1	1	1	10	10	10	1	
6e		9				5	4	3		
7e		7				8	6	2		
8e		3				4	9	5		
9e		6				2	8	7		
10e		1				1	1	1		

Element van de eerste orde: 1
Element van de tweede orde: 10

Elementen van de vijfde orde: 3, 4, 5, 9
Elementen van de tiende orde: 2, 6, 7, 8
Merk op dat $2^{-1} \equiv 6$ en dat $7^{-1} \equiv 8$.
Hiermee kan je tevens besluiten dat de elementen, die groepen of deelgroepen voortbrengen van een bepaalde orde, steeds in even aantallen optreden (wat een degelijke test is bij de berekeningen).
Je kunt dus de tabel herschrijven bij uitsluitend gebruik van de machten van 2, of 6, of 7 of 8.
Merk op: al de $(p-1):2$-de machten van de elementen van de tiende orde zijn precies gelijk aan 10 (d.i.: $p-1$).
Voor modulo 11 zou je nu logaritmenstelsels kunnen schrijven in één van de vier basissen 2, 6, 7 of 8 en rekenschijfjes maken.
Naast de triviale deelgroepen heb je ook de deelgroep $\{1, 3, 4, 5, 9\}, \times$. De deelgroepen zijn ook weer cyclisch en dus ook met de machten van één enkel element te schrijven.

9 Rekenen modulo 13

Maak weer een vermenigvuldigingstafel met de methode van de rekenkundige rijen en stel daarna de tabel van de machten van de elementen op.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2e		4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1
3e		8	1	12	8	8	5	5	1	12	5	
4e		3		9	1	9	9	1		3	3	
5e		6		10		2	11			4	7	
6e		12		1		12	12			1	12	
7e		11				7	6				2	
8e		9				3	3				9	
9e		5				5	8				8	
10e		10				4	4				10	
11e		7				11	2				6	
12e		1				1	1				1	

Element van de eerste orde: 1
Element van de tweede orde: 12
Elementen van de derde orde: 3, 9
Elementen van de vierde orde: 5, 8
Elementen van de zesde orde: 4, 10
Elementen van de twaalfde orde: 2, 6, 7, 11.
Merk op dat $2^{-1} = 7$ en $6^{-1} = 11$.
Zo kan je weer eens de tabel herschrijven met op de nevendiagonaal respectievelijk 2, 6, 7 of 11 ofwel uitsluitend gebruik makend van de machten van één van deze getallen.

Je kunt ook vier logaritmenstelsels optekenen.
Merk weer op dat de $(13-1):2$ of zesde machten telkens gelijk zijn aan 1 of 12 (d.i. $p-1$).
Tel het aantal verschillende deelgroepen en herinner je dat deze deelgroepen commutatief en cyclisch zijn.
Vanzelfsprekend mag je ook zeggen dat de groep $F_{13}, \times$ voortgebracht wordt door elk van de elementen van de twaalfde orde.

10 Rekenen modulo 17

Stel zelf een vermenigvuldigingstafel op (methode der rekenkundige rijen). Gebruik dan deze tafel om de opeenvolgende machten van de elementen van F_{17} te berekenen.
Er zijn nu niet minder dan acht logaritmenstelsels en de achtste macht van de elementen van de zestiende orde zijn weer telkens gelijk aan $16 = 17-1$. Ter controle volgt hier de tabel der machten:

1e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2e		4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	13	1
3e		8	10	13	6	12	3	2	15	14	5	11	4	7	8	
4e		16	13	1	13	4	4	16	16	4	4	13	1	13	1	
5e		15	5		14	7	11	9	8	6	10	3		12		
6e		13	15		2	8	9	4	4	9	8	2		15		
7e		9	11		10	14	12	15	2	5	3	7		6		
8e		1	16		16	16	16	1	1	16	16	16		16		
9e			14		12	11	10			7	6	5		3		
10e			8		9	15	2			2	15	9		8		
11e			7		11	5	14			3	12	6		10		
12e			4		4	13	13			13	13	4		4		
13e			12		3	10	6			11	7	14		5		
14e			2		15	9	8			8	9	15		2		
15e			6		7	3	5			12	14	10		11		
16e			1		1	1	1			1	1	1		1		

Schrijf nu de tabel voortgebracht door het element 3.
Merk op dat $3^{-1} \equiv 6$, $5^{-1} \equiv 7$, $10^{-1} \equiv 12$ en $11^{-1} \equiv 14$ wat je dan toelaat te besluiten dat de paren $\{3, 6\}$, $\{5, 7\}$, $\{10, 12\}$ en $\{11, 14\}$ voortbrengende elementen zijn.

11 Rekenen modulo 19

Je kan weer een vermenigvuldigingstabel F_{19} opstellen met de methode der rijtjes, ofwel kan je rechtstreeks de opeenvolgende machten van de elementen berekenen. Zodra je een element van de achttiende orde vindt, kan je dadelijk de bewerkingstabel uitschrijven. En nu mag je echt boffen, want het element 2 is precies een element van de 18e orde.

Orde van de elementen:

1e	2e	3e	6e	9e	18e
1;	18;	7, 11;	8, 12;	4, 5, 6, 9, 16, 17;	2, 3, 10, 13, 14, 15

Een van de prettige volgorden voor het beginrijtje van de tabel is:

1–15–16–12–9–2–11–13–5–18–4–3–7–10–17–8–6–14.

Wellicht raad je wel door welk element de groep voortgebracht wordt.
Paren voortbrengende elementen: {2, 10}, {3, 13} en {14, 15}.

12 **Rekenen modulo 23**

Er zijn elementen van de 1e, 2e, 11e en 22e orde. Van deze laatste soort zijn: 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20 en 21.
Paren voortbrengende elementen {5, 14}, {7, 10}, {11, 21}, {15, 20}, {17, 19}.

13 **Rekenen modulo 29**

Orde van de elementen:

1e	2e	4e	7e	14e
1	28	12, 17	7, 20, 23, 24, 25	4, 5, 6, 9, 13, 16, 22

28e: 2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27

Paren voortbrengende elementen {2, 15}, {3, 10}, {8, 11}, {14, 19}, {18, 21}.

14 **Rekenen modulo 31**

Hier is de vijfde macht van 2 gelijk 1, maar de opeenvolgende machten van 3 zijn:

3–9–27–19–26–16–17–20–29–25–13–8–24–10–30–28–22–4–12–5–15–14–11
–2–6–18–23–7–21–1

Er zijn twee elementen van de derde orde, vier van de vijfde orde, twee van de zesde orde, vier van de tiende orde, acht van de vijftiende orde en acht van de dertigste orde.
Paren voortbrengende elementen {3, 21}, {11, 17}, {12, 13}, {22, 24}.
Denk aan je acht logaritmenstelsels en aan het maken van een rekencirkel.

15 **Rekenen modulo 37**

De opeenvolgende machten van 2 zijn:

2–4–8–16–32–27–17–34–31–25–13–26–15–30–23–9–18–36–35–33–29–21–5
–10–20–3–6–12–24–11–22–7–14–28–19–1

Er zijn 12 elementen van de orde 30; in paren genomen {2, 19}, {5, 15}, {13, 20}, {17, 24}, {18, 35}, {22, 32}.

16 **Rekenen modulo 41:**

Hier gelden $20^{20} \equiv 1$, $3^8 \equiv 1$, $4^{10} \equiv 1$, $5^{20} \equiv 1$ en dan eindelijk $6^{40} = 1$ en de opeenvolgende machten van 6 zijn:

6–36–11–25–27–39–29–10–19–32–28–4–24–21–3–18–26–33–34–40–35–5–
30–16–14–2–12–31–22–9–13–37–17–20–38–23–15–8–7–1

Er zijn 16 elementen van de orde 40. De paren zijn hier: {6, 7}, {11, 15}, {12, 24}, {13, 19}, {17, 29}, {22, 28}, {26, 30}, {34, 35}.

17 **Rekenen modulo 43**

Hier is $2^{14} \equiv 1$ en de opeenvolgende machten van 3 zijn:

3–9–27–38–28–41–37–25–32–10–30–4–12–36–22–23–26–35–19–14–42–40–
34–16–5–15–2–6–18–11–33–13–39–31–7–21–20–17–8–24–29–1

18 **Rekenen modulo 47**

Je vindt $2^{23} \equiv 1$ en $3^{23} \equiv 1$. Verder zijn de opeenvolgende machten van 4:

4–16–17–21–37–7–28–25–6–24–2–8–32–38–11–44–35–46–43–31–30–25–10
–40–19–29–22–41–23–45–39–15–13–42–27–14–9–36–3–12–1

Er zijn elementen van veel verschillende orden: 1e, 2e, 3e: {6, 36}, 6e: {7, 37}, 7e: {4, 11}, {16, 35}, {21, 41}, {32, 39}, 14e: {2, 22}, {8, 27}, 21e: {9, 24}, {10, 13}, {14, 40}, {15, 23}, {17, 38}, {25, 31} en van de 42e: {3, 29}, {5, 26}, {12, 18}, {19, 34}, {20, 28}, {30, 33}.

19 **Rekenen modulo 53**

De opeenvolgende machten van 2 geven:

2–4–8–16–32–11–22–44–35–17–34–15–30–7–14–28–3–6–12–24–48–43–33–
13–26–52–51–49–45–37–21–42–31–9–18–23–46–39–25–50–47–41–29–5–10
–20–40–27–1.

20 **Rekenen modulo 59**

Je rekent gemakkelijk na dat 2 een voortbrengend element is; dit geldt o.m. ook voor 6 terwijl 3 een element van de 29e orde is.

21 **Rekenen modulo 61**

Ook hier is 2 een voortbrengend element.

22 **Rekenen modulo 67**

Even gezellig blijkt ook hier dat 2 een voortbrengend element is.

23 Rekenen modulo 71

Hier valt iets meer te rekenen, want $2^{35} \equiv 1$, $3^{35} \equiv 1$, $4^{35} \equiv 1$, $5^{5} \equiv 1$, $6^{35} \equiv 1$ en dan eindelijk $7^{70} \equiv 1$.

24 Rekenen modulo 73

De eerste pogingen leveren $2^{9} \equiv 1$, $3^{12} \equiv 1$, $4^{9} \equiv 1$ en dan $5^{72} \equiv 1$.

25 Rekenen modulo 79

Een meevaller, want $2^{39} \equiv 1$ en dan dadelijk $3^{78} \equiv 1$.

26 Rekenen modulo 83

Zeer vlug kom je tot $2^{82} \equiv 1$.

27 Rekenen modulo 89

Hier geldt $2^{11} \equiv 1$ en $3^{88} \equiv 1$.

28 Rekenen modulo 97

Een eerder lange brok, want $2^{48} \equiv 1$, $3^{48} \equiv 1$, $4^{24} \equiv 1$ en eindelijk $5^{96} \equiv 1$.

Machten van de elementen in F_p, $\times$.

F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	2
F_2	1																			
F_3	1	2																		
F_5	1	4	4	2																
F_7	1	3	6	3	6	2														
F_{11}	1	10	5	5	5	5	10	10	10	2										
F_{13}	1	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2								
F_{17}	1	8	16	4	16	16	16	8	8	16	16	16	4	16	4	2				
F_{19}	1	18	18	9	9	9	3	6	9	18	3	6	18	18	18	9	9	2		
F_{23}	1	11	11	11	22	11	22	11	11	22	22	11	11	22	22	11	22	11	22	2
F_{29}	1	28	28	14	14	14	7	28	14	28	28	4	14	28	28	28	7	4	28	2
F_{31}	1	5	30	5	3	6	15	5	15	15	30	30	30	15	10	5	30	15	15	1
F_{37}	1	36	18	18	36	4	9	12	9	3	6	9	36	12	36	9	36	36	36	3
F_{41}	1	20	8	10	20	40	40	20	4	5	40	40	40	8	40	5	40	5	40	2
F_{43}	1	14	42	7	42	3	7	14	21	21	7	42	21	21	21	7	21	42	42	4

29 Hiermee is dan het rekenen in de velden $\mathbb{Z}_p$, $+$, $\times$ tot $p < 100$ opgelost. Er kan dus veilig wat gerekend worden en ik meen dat groepswerk hier wel aangenaam kan verlopen. Het voorhanden liggend materiaal lijkt me wel bruikbaar bij het toetsen van algemene eigenschappen van galoisvelden. Vergeet daarbij eventueel niet aan te sluiten met stellingen die reeds bekend zijn door de leerlingen (o.m. de Stelling van Fermat) en bovendien laten de tabellen vermoeden dat een algemeen bewijs voor bepaalde eigenschappen kan geleverd worden.

Wellicht voelt een of andere lezer van Euclides zich wel geneigd om te bewijzen dat, als p priem is en a een element van de orde $p-1$ is in de groep van de vermenigvuldiging, dat dan geldt $a^{(p-1):2} \equiv p-1$.

Terloops is het ook wel interessant om, eens een F-tabel berekend, de inversen van de elementen op te tekenen en er een zekere wetmatigheid in op te zoeken.

30 Je weet reeds hoe weinig overzichtelijk de spreiding van de priemgetallen in de verzameling van de natuurlijke getallen is. Je kan dus wel vermoeden dat de orde van de elementen in de verschillende cyclische F_p groepen er ook weinig ordelijk zal uitzien. Hier volgt een tabel, die je een overzicht geeft, en waar je toch wel even over kunt nadenken.

1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
2	2																				
3	14	7	7	7	28	28	2														
0	30	10	30	3	6	10	15	10	2												
3	36	12	36	18	3	6	18	12	18	4	36	9	9	36	2						
0	40	10	40	10	40	8	40	40	40	10	4	20	40	40	8	5	8	20	2		
7	14	21	21	21	42	14	42	42	42	21	7	42	42	7	3	6	21	7	21	7	2

Uitbreiding. – Neem bijvoorbeeld $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ en voeg aan deze verzameling restklassen het element $i(i^2 = -1)$ toe. Welke elementen moeten we nu aan de verzameling $\{0, 1, 2, i\}$ (klassestreepjes werden weer weggelaten) toevoegen opdat in de nieuwe verzameling de bewerkingen + en × steeds gedefinieerd zouden zijn. Het antwoord is zeer gemakkelijk te vinden en de vereiste verzameling is dan

$$C_3 = \{0+0.i,\ 1+0.i,\ 2+0.i,\ 0+1.i,\ 0+2i,\ 1+i,\ 1+2i,\ 2+i,\ 2+2i\}$$

met cardinaalgetal 9. Eenvoudiger: $C_3 = \{0, 1, 2, i, 2i, 1+i, 1+2i, 2+i, 2+2i\}$. Als je de C_3, + tabel optekent merk je dat je weer een commutatieve groep hebt. Om C_3, × te onderzoeken volgt hier: 1° de gewone vermenigvuldigingstabel, 2° het berekenen van de machten van de elementen en 3° het herschrijven van de tabel in een bepaalde volgorde. Uitleg is verder niet nodig, ik kan je alleen maar zeggen: kijk!

	1	2	i	2i	1+i	1+2i	2+i	2+2i
1	1	2	i	2i	1+i	1+2i	2+i	2+2i
2	2	1	2i	i	2+2i	2+i	1+2i	1+i
i	i	2i	2	1	2+i	1+i	2+2i	1+2i
2i	2i	i	1	2	1+2i	2+2i	1+i	2+i
1+i	1+i	2+2i	2+i	1+2i	2i	2	1	i
1+2i	1+2i	2+i	1+i	2+2i	2	i	2i	1
2+i	2+i	1+2i	2+2i	1+i	1	2i	i	2
2+2i	2+2i	1+i	1+2i	2+i	i	1	2	2i

Machten van de elementen:

	1	2	i	2i	1+i	1+2i	2+i	2+2i
1e	1	2	i	2i	1+i	1+2i	2+i	2+2i
2e		1	2	2	2i	i	i	2i
3e			2i	i	1+2i	1+i	2+2i	2+i
4e			1	1	2	2	2	2
5e					2+2i	2+i	1+2i	1+i
6e					i	2i	2i	i
7e					2+i	2+2i	1+i	1+2i
8e					1	1	1	1

	1	2+i	i	2+2i	2	1+2i	2i	1+i
1	1	2+i	i	2+2i	2	1+2i	2i	1+i
2+i	2+i	i	2+2i	2	1+2i	2i	1+i	1
i	i	2+2i	2	1+2i	2i	1+i	1	2+i
2+2i	2+2i	2	1+2i	2i	1+i	1	2+i	i
2	2	1+2i	2i	1+i	1	2+i	i	2+2i
1+2i	1+2i	2i	1+i	1	1+2i	i	2+2i	2
2i	2i	1+i	1	1+2i	i	2+2i	2	1+2i
1+i	1+i	1	1+2i	i	2+2i	2	1+2i	2i

Merk op dat, als $a^8 = 1$, dan is $a^4 = 2$ (vergelijk met hoger).
Verder zie je ook gemakkelijk dat

$$(1+i)^{-1} = 2+i \text{ en } (1+2i)^{-1} = 2+2i$$

I.O.W.O

(Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs)

CURSUSSEN WISKUNDE voor LERAREN

De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde organiseert in het cursusjaar 1971/'72 de navolgende cursussen voor *wiskunde-leraren 1e/2e graad*:

A. leraren 1e graad.

I. *3-daagse cursussen*

1	Toegepaste Wiskunde (herh.)	14, 15, 16 okt. 1971	Amsterdam
2	Algebra (herh.)	15, 16, 17, 18 dec. 1971	Utrecht
3	Projectieve Meetkunde	6, 7, 8 jan. 1972	Groningen
4	Topologie	21, 22, 23 febr. 1972	Utrecht
5	Discrete Wiskunde	6, 7, 8 apr. 1972	Eindhoven

II. *middag cursussen* (tijd: 15.30–(ca.) 17.30 u.; 1 × per 14 dagen)

1 a Toegepaste verzamelingenleer – (4 ×) aanvang 20/9 1971 Utrecht
  b Geschiedkundige aspecten v.d. verzamelingenleer – (2 ×) aanvang 15/11 1971 Utrecht
2 Algoritmische aspecten van de wiskunde – (6 ×) aanvang 10/1 1972 Utrecht
3 Historische aspecten van de analyse – (5 ×) aanvang 4/1 1972 Zwolle
4 Metrische ruimten – (12 ×) aanvang 14/9 1971 Utrecht

B. leraren 2e graad.

middag cursus (tijd: 15.30–(ca.) 18.30 u.; 1 × per week)
Computerkunde – (15 ×) aanvang 15/9 1971 Utrecht

Toelichting:

ad A.I.

1 Doel van de cursus Toegepaste Wiskunde: Het ontdekken en verzamelen van voorbeelden, waaruit voor leerlingen van het voortgezet onderwijs blijkt, hoe andere leervakken in het maatschappelijk leven zijn doorweven met toepassingen van de wiskunde.

2 a Karakterisering van algebraïsche getallen als deellichaam van de complexe getallen.
  b Constructie van een algebraïsche uitbreiding van een lichaam (zowel met rationale als eindige lichamen als voorbeeld).
  c Cirkeldelingslichamen (zowel via a door complexe wortels van $z^n = 1$ te adjungeren als via b). De bestudering van de Galoisgroep in dit geval.
  d Symmetrische functies en expliciete Galoistheorie in het geval van kwadratische en kubische uitbreidingen.
  e Iets over de klassieke problemen.

3 en 4 De cursussen Projectieve meetkunde en Topologie zijn ingericht ter voorbereiding op de gelijknamige keuzevakken, zoals die vermeld staan in de leerprogramma's voor Wiskunde-II.
Projectieve meetkunde: Het ligt in de bedoeling om een synthetische opbouw te geven met uitzicht op de geometrische algebra. De te maken oefeningen zullen direkt verband houden met mogelijke schoolstof.

Topologie: Tijdens de cursus wordt gebruik gemaakt van een Amerikaans boek: Chinn & Steenrod, „First Concepts of Topology", dat specifiek voor keuzevak-gebruik vertaald wordt. (Verschijnt eind nov. 1971; Wolters-Noordhoff). Van de deelnemers wordt verwacht, dat zij dit boek zelf aanschaffen. Dit zal centraal gebeuren via de C.M.L.W. (ca. *f* 12,–).

5 Inhoud: Combinatorische configuraties, zoals orthogonale matrices, blockdesigns, grafen, codes, latijnse vierkanten en coding theory worden besproken met hulpmiddelen uit de Galois-lichamen, vectorruimten over Galois-lichamen en elementaire getaltheorie.

ad A.II.

1 Grote delen van de wiskunde kan men baseren op de verzamelingsleer. Voor een aantal gevallen wordt zo'n opbouw nagegaan: de natuurlijke getallen met hun operaties, lichamen, ordeningen. Bepaalde principes vinden toepassing in uiteenlopende gebieden (v.b. Keuzeaxioma, lemma van Zorn).
Ten besluite wordt een overzicht van het ontstaan en de ontwikkeling van de verzamelingsleer gegeven (met nadruk op de intuïtieve verzamelingsleer).

2 Een door de abstracte wiskunde verontachtzaamde traditie is die van de rekentechniek. De computer heeft haar weer in de belangstelling gebracht. Oude voorbeelden zijn: het algoritme van Euclides, berekeningsprocedures voor determinanten, de regel van Simpson, het rekenschema van Horner. Door diepgaande analyse werd inzicht verkregen over de reikwijdte van het begrip berekenbaar (ook voor begrippen als inductie, recursie, effectiviteit, beslisbaarheid).

3 Een gemodifieerde herhaling van de cursus „Geschiedenis van het Integraalbegrip", waarin de wetenschappelijke ontwikkeling van het integraalbegrip historisch werd benaderd.

4 Metrische ruimten zijn verzamelingen waarin aan elk tweetal punten een afstand wordt toegekend (met „fatsoenlijke" rekenregels). Onderzoek van de topologie in een metrische ruimte geeft o.m. inzicht in de eigenschappen van continue functies van een reële veranderlijke.
N.B. Bij deze cursus wordt, afhankelijk van de belangstelling, gelegenheid gegeven van 14.30–15.30 een vraagstukkenpraktikum te volgen en/of vraagstukken ter correctie in te leveren.

ad B.

Voor deze cursus wordt bij de cursisten geen voorkennis op het gebied van computers of automatisering vereist. De cursus zal een zo volledig mogelijke voorbereiding zijn op het computer-onderwijs in bijvoorbeeld een 3e of 4e klas Havo, zij richt zich als zodanig *specifiek op 2e graads-leraren.*

De leerstof zal bevatten:

a algoritmiek
b een eenvoudige programmeertaal
c een aantal computertoepassingen
d enige achtergrondinformatie buiten de leerlingenstof.

De cursist zal regelmatig ervaring opdoen met het gebruik van computers, terwijl ook de didaktiek van het leervak onderwerp van bespreking zal zijn.

N.B. Mocht blijken, dat de cursus niet geheel voltekend is door 2e-graads leraren, dan kunnen ook 1e-graads wiskundeleraren die nog niet eerder een cursus computerkunde hebben gevolgd, deelnemen.

Aanmelding:

Aanmeldingsformulieren worden naar de scholen van het voortgezet onderwijs verstuurd. Ook zijn zij op telefonische aanvraag te verkrijgen bij het Instituut; tel. 030-531528 of 531530.

De formulieren voor deelname moeten *vóór 30 juni 1971* aan het Sekretariaat van het Instituut, Univ.centrum De Uithof, Budapestlaan 6, Utrecht, worden toegestuurd.

De staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen, Mr. J. H. Grosheide, heeft ons gemachtigd mededeling te doen van het feit, dat hij evenals in voorgaande jaren, de schoolleiding aanbeveelt, wiskunde-leraren de gelegenheid te bieden één of meerdere cursussen te volgen en dat hij een daartoe eventueel benodigd buitengewoon verlof goedkeurt.

Namens het I.O.W.O.
Drs. E. J. Wijdeveld

DEELNAME AAN HET EXPERIMENT COMPUTERKUNDE

Scholen van het VWO, Havo en Mavo, lager en middelbaar beroepsonderwijs, waarin belang stelling en mogelijkheid voor het facultatieve leervak computerkunde in de cursus 1971-1972 bestaat, worden bij deze uitgenodigd tot deelname aan het experiment, uitgaande van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.
Reacties op deze uitnodiging ontvangen wij graag schriftelijk aan het adres:

C.M.L.W. computerkunde
Universiteitscentrum De Uithof
Budapestlaan 6
UTRECHT

Nadere informatie over inhoud en uitvoering van dit experiment en de voorwaarden tot deelname vindt u hieronder en/of kunt u aan bovenstaand adres aanvragen.

Algemene doelstelling van het leervak

Een eerste kennismaking met computers en automatisering zoals deze zich manifesteren in studie, beroep en dagelijks leven. Daarnaast vooral ook het verkrijgen van algorithmische, organisatorische en operationele vaardigheden, die ook buiten de automatisering van groot belang zijn.

Leerstof

De leerstof mondt uit in praktisch werken met vereenvoudigde voorbeelden van werkelijk computergebruik, zoals een girodienst, een personeelsadministratie en simulatie van processen. Daaraan vooraf gaat oefening in het instrueren (programmeren) van machines, waarbij speciaal gelet wordt op het leren onderscheiden en isoleren van routinematigheden (algoritmiek), het leren herkennen van hoofdlijnen van een oplossing (organisatie) en het leren aangeven van een oplossing in ondubbelzinnige opdrachten (operationele vaardigheid).

Het bovenstaande kan uitsluitend worden gerealiseerd als elke leerling gedurende de gehele cursus kan beschikken over computerfaciliteiten. De te gebruiken programmeertaal dient gericht te zijn op deze leerstof en derhalve ontdaan te zijn van elke moeilijkheid, die niet essentieel is in dit licht.
De leerstof vereist geen wiskundige voorkennis van de leerlingen.

Leermiddelen

Bij het experiment kan gebruik gemaakt worden van het leerboekje „Computerkunde 1 en 2" (uitgave Wolters-Noordhoff) en/of het „Werkschrift Computerkunde" (uitgave CMLW). Dit laatste gericht op leerlingen, die behoefte hebben aan meer oefenmateriaal. In beide wordt gebruik gemaakt van de programmeertaal ECOL (Educational Computer Language), die enerzijds vrijwel alle kenmerken van een hogere programmeertaal heeft, maar anderzijds tot het uiterst noodzakelijke is vereenvoudigd.

Docenten

Bij het AVO en VWO wordt bij voorkeur gebruik gemaakt van wiskundedocenten. Uitgaande van de CMLW zijn voor deze leraren al verscheidene heroriënteringscursussen computerkunde gegeven. Ook in het komende cursusjaar staan weer cursussen op het programma. Nadere mededelingen over de toelating tot deze cursussen zullen nog volgen. Ter begeleiding van de leraren computerkunde wordt voor de komende cursus een lerarenboek uitgegeven, verschijnt verder een contactblad met aanwijzingen en nieuws en zijn er tenslotte contactvergaderingen.

Leerlingen

Het computeronderwijs richt zich op leerlingen vanaf 15 jaar, zeker niet uitsluitend op exact begaafden.

Programmaverwerking

Vanaf ongeveer de achtste les wordt van elke leerling verwacht dat hij programma's schrijft (gemiddeld één per twee lesuren) en deze door een computer laat verwerken. Daartoe zijn kaarten ontworpen, waarop met behulp van potloodstreepjes het programma kan worden aangegeven (te vergelijken met volkstellingkaarten). De kaarten moeten worden opgestuurd, waarna de uitwerkingen in principe binnen een week op de school terug verwacht kunnen worden.

Kosten

Voor rekening van de school of voor de leerling komen, behalve de leerboeken, de kosten van de aanstreepkaarten en de verzendkosten, samen naar schatting *ƒ* 0,40 à *ƒ* 0,50 per programma.

Overige voorwaarden

Van de deelnemende docenten wordt uiteraard belangstelling voor computerkunde en ook bereidheid tot meewerken aan het ontwikkelen en evalueren van eèn nieuw leervak en bereidheid tot studie in dit vak verwacht. In verband met de programmaverwerking is de deelname het komende cursusjaar nog gelimiteerd. Toelating geschiedt in volgorde van aanmelding.

Utrecht, april 1971
Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde,
(G. A. Vonk)

Rectificatie

In de recensie van 'M. E. Kok e.a.', blz. 277 is de notatie: $x = +\sqrt{5} \vee -\sqrt{5}$ ontsnapt. Deze notatie is *niet* door de auteurs gebruikt.
Het voorbeeld op blz. 278 illustreert slechts mijn irritatie. Ze zijn natuurlijk niet telkens hetzelfde.

op blz. 79: $x^2-2x-2 = (x-1)^2-3$

op blz. 81: $-x^2-2x+8 = -(x+1)^2+9$

op blz. 83: $x^2+4x-1 = (x+2)^2-5$

waarna de vergelijkingen: $x^2-2x-2 = 0$ etc. met het '*abc*-kanon' worden opgelost. De uitdrukking 'treintje spelen' wil ik wel a.v. moedwillig verduidelijken.

$$(x-\tfrac{1}{4})^2 = 3\tfrac{9}{16} = \tfrac{57}{16} = \frac{57\times 5^4}{10^4} = 3{,}5625$$

$\uparrow$ Locomotief $\quad\uparrow$ tender $\quad\nwarrow \uparrow \nearrow$ goederenwagens

Burgers

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributie

De penningmeester maakt de leden er op attent dat zij nu reeds de contributie voor het verenigingsjaar 1971-1972 kunnen betalen. Op de algemene ledenvergadering van 19 december 1970 is besloten de contributie te handhaven op *f* 15,—. Leden die Euclides niet via de vereniging ontvangen betalen *f* 8,—.
De betaling kan plaats vinden door storting of overschrijving op giro 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

J. van Dormolen

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, XXII[9]–XXIII[5], december 1969–augustus 1970.

L. Kienle, Das Maupertuis-Prinzip der kleinsten Wirkung;
E. Merkel, 'Spiegelstrategien-lernenden' Automaten mit einem Lehrgerät für Boolesche Algebra;
W. Scholz, Bruchrechnung.

E. Röhrl, Zum Neuentwurf von DIN 1312, Geometrische Orientierung;
J. Schmidt, Die Kennzeichnung des Körpers der komplexen Zahlen.

G. Pickert, Logische Gesichtspunkte der Gleichungslehre;
U. Kahl, Analysis unter topologische Gesichtspunkten im Unterricht.

U. Lubeseder, Mathematikunterricht in der Grundschule;
G. Holland, Die Einführung des Rechenstabes und der Logarithmusfunktionen mit Hilfe von Intervallschachtelungen;
E. Ehrhardt, Ein wenig Geschichte der Mathematik für unsere Schüler.

H. G. Bigalke, Lehrerausbildung - quo vadis?
H. Foit, Achsenaffine Abbildungen und affine Abbildungen ohne Festpunkte;
W. Ladewig, Einige Aufgaben zur linearen Optimierung.

G. Alefeld e.a., Über das neue Studienfach Informatik;
G. Harbeck, Das Nuffield Science Teaching Project;
K. Schweissguth, Drei Logicus-Programme für den Mathematikunterricht;
F. Haeberlen, Modell zur Demonstration der Kegelschnitte;
J. Kühl, 4. Bundestagung für Didaktik der Mathematik.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

262 Een rechthoekig biljart is 1,43 m lang en 0,96 m breed. Een biljartbal wordt uit een hoek weggeschoten in een richting, die met de zijkanten hoeken van 45° maakt (zonder effect). Na hoeveel terugkaatsingen is de bal voor het eerst weer in een hoek aangekomen?

263 Iemand heeft onbeperkt veel muntstukken van a en van b gulden; $2 < a < b$, a en b zijn relatief priem. Hij koopt $a-1$ artikelen van verschillende prijzen, die telkens 1 gulden verschillen. Elk artikel betaalt hij afzonderlijk met gepast geld. Hoeveel kost het goedkoopste artikel minimaal (uitgedrukt in a en b)? (B. Kootstra)

Oplossingen

260 Een torus was in 16 congruente 'vierkanten' verdeeld. Deze moesten elk rood of zwart geschilderd worden zo, dat elke mogelijke verdeling van de kleuren over vier vierkanten, die samen een groot vierkant vormen, precies éénmaal voorkomt.
De torus representeren we op de gebruikelijke manier door een vierkant. (Door boven- en onderkant aan elkaar te lijmen en daarna hetzelfde te doen met de beide zijkanten, ontstaat de torus weer.) De 'vierkanten' op de torus worden nu door echte vierkanten gerepresenteerd. De kleurverdeling kan als volgt gekozen worden:

1	1	0	1
0	0	0	1
1	0	0	0
1	0	1	1

Opmerking. De oplossingen van deze opgave is door proberen gevonden.

261 Wat is het kleinste getal met 6^6 delers?
Zoals bekend, is het aantal delers van b.v. $2^4\ 3^2\ 5^3\ 11^4\ 13$ gelijk aan
$(4+1)\ (2+1)\ (3+1)\ (4+1)\ (1+1)$.
Een getal met 6^6 delers is dus

$$2^2\ 3^2\ 5^2\ 7^2\ 11^2\ 13^2\ 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

We proberen nu dit getal te vervangen door een kleiner met evenveel delers door het aantal factoren 2 en 3 te vergroten. Dit levert de volgende mogelijkheden:

$$2^5\ 3^5\ 5^2\ 7^2\ 11^2\ 13^2\ 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$
$$2^7\ 3^5\ 5^2\ 7^2\ 11^2\ 13^2\ 17^2 \cdot 19 \cdot 23$$
$$2^8\ 3^5\ 5^2\ 7^2\ 11^2\ 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$
$$2^7\ 3^7\ 5^2\ 7^2\ 11^2\ 13^2\ 17^2\ 19^2$$
$$2^8\ 3^7\ 5^2\ 7^2\ 11^2\ 13^2\ 17 \cdot 19 \cdot 23$$
$$2^8\ 3^8\ 5^2\ 7^2\ 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

Vergroting van het aantal factoren 2 tot 11 levert geen verkleining van de uitkomst, evenmin als vergroting van het aantal factoren 5. Onder de zes gevonden mogelijkheden blijkt het grootste te zijn

$$2^8\ 3^5\ 5^2\ 7^2\ 11^2\ 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

Inhoud